Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 14, No. 2 (2024) 162–176.

Paper Type: Original Article

Statistical-Economic Design of Control Charts RNLMVSIT^2

Asghar Seif[1,*], Mitra Abdolmohammadi[2]

[1] Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran; A.Seif@basu.ac.ir.
[2] Department of Statistics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran; mitraabdolmohadi@gmail.com.

Citation:

Received: 10 October 2023 *Revised: 01 Januray 2024* *Accepted: 26 March 2024*	Seif, A., & Abdolmohammadi, M. (2024). Statistical-economic design of control charts RNLMVSIT^2. *Journal of quality engineering and management, 14*(2), 162-176.

Abstract

Purpose: In many industrial processes, there are situations where simultaneous monitoring and control of two or more dependent variables are necessary. In such cases, univariate control of quality characteristics can be misleading when considered independently. In the classical approach, when a quality characteristic falls outside the specified technical limits, the quality loss is regarded as a cost. All products within the technical limits of the quality characteristic are assumed to have similar quality, regardless of the deviation of the quality characteristic from its target value. However, it is essential to distinguish between products that fall within the technical limits of the quality characteristic, as any deviation from the target value incurs a proportional loss.

Methodology: This paper introduces, for the first time in the literature, a reflected normal loss function to determine the average cost of producing non-conforming products when two quality characteristics are evaluated. In summary, this study focuses on the statistical-economic design of a multivariate T^2-Hotelling control chart with multivariate variable sampling intervals in the presence of a reflected normal multivariate loss function (RNLMVSIT^2). Additionally, sensitivity analysis is employed to understand the effects of time and cost parameters on design parameters and the average cost.

Findings: The results demonstrate the satisfactory performance of the proposed models.

Originality/Value: This paper introduces, for the first time in the literature, a reflected normal loss function to determine the average cost of producing non-conforming products when two quality characteristics are evaluated.

Keywords: Statistical-economic design, T^2-hotelling control chart, Markov chain, Reflected normal multivariate loss function.

Corresponding Author: A.Seif@basu.ac.ir
10.48313/jqem.2024.214759
Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۴، شماره (۲)، (۱۴۰۳)، ۱۷۶-۱۶۲

نوع مقاله: پژوهشی

طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل RNLMVSIT^2

اصغر سیف[۱،*]، میترا عبدالمحمدی[۲]

[۱]گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران.

[۲]گروه آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: در بسیاری از فرآیندهای صنعتی، شرایطی وجود دارد که در آن نظارت و کنترل هم‌زمان دو یا چند متغیر وابسته ضروری است. در چنین مواردی، کنترل یک‌متغیره‌ی ویژگی‌های کیفی به‌صورت مستقل می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در رویکرد کلاسیک، زمانی که یک ویژگی کیفی خارج از حدود مشخصات فنی قرار می‌گیرد، زیان کیفیت به‌صورت هزینه در نظر گرفته می‌شود و تمام محصولاتی که در محدوده مشخصات فنی قرار دارند، بدون در نظر گرفتن فاصله آن‌ها از مقدار هدف، دارای کیفیت یکسان فرض می‌شوند. با این حال، ضروری است میان محصولاتی که در محدوده مشخصات فنی قرار دارند تمایز قایل شد، چراکه هرگونه انحراف از مقدار هدف، زیانی متناسب ایجاد می‌کند.

روش‌شناسی: در این پژوهش، برای نخستین بار در ادبیات علمی، از تابع زیان نرمال بازتابی جهت تعیین میانگین هزینه تولید محصولات نامنطبق در شرایطی استفاده شده است که دو ویژگی کیفی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. به‌طور خلاصه، این مطالعه بر طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل چندمتغیره T^2 هاتلینگ با فواصل نمونه‌برداری متغیر چندمتغیره در حضور تابع زیان نرمال بازتابی چندمتغیره (*RNLMVSIT*^{2}) متمرکز است. همچنین، از تحلیل حساسیت برای بررسی اثرات پارامترهای زمانی و هزینه‌ای بر پارامترهای طراحی و میانگین هزینه استفاده شده است.

یافته‌ها: نتایج نشان می‌دهد که مدل‌های پیشنهادی عملکرد رضایت‌بخشی دارند.

اصالت/ ارزش‌افزوده علمی: در این مقاله، برای نخستین بار، از تابع زیان نرمال بازتابی برای تعیین میانگین هزینه تولید محصولات نامنطبق در شرایطی که دو ویژگی کیفی به‌طور هم‌زمان ارزیابی می‌شوند، استفاده شده است.

کلیدواژه‌ها: طراحی آماری-اقتصادی، نمودار کنترل T^2-هتلینگ، زنجیر مارکوف، تابع زیان چندمتغیره نرمال انعکاسی.

۱- مقدمه

از آن‌جا که تغییرپذیری جز ماهیت ذاتی عملکردی مشخصه‌های کیفی به شمار می‌آید، استفاده از روش‌های آماری برای کنترل تغییرات یاد شده، امری اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. کنترل آماری فرآیند[۱]، مجموعه‌ای قدرتمند و توانا برای ایجاد ثبات در فرآیند و بهبود کارایی آن از طریق کاهش تغییرپذیری است. یکی از ابزارهای اصلی کنترل‌آماری فرآیند، نمودار کنترل است. به‌منظور استفاده از یک نمودار کنترل، تحلیل‌گر به تعیین اندازه‌ی

[1] Statistical Process Control (SPC)

نمونه(n)، فاصله‌ی نمونه‌گیری (h) و ضریب حدود کنترل (k) نیاز دارد. این سه پارامتر را پارامترهای طراحی و تعیین آن‌ها را طراحی نمودار کنترل می‌نامند. بر این اساس سه نوع رویکرد تحت عنوان‌های طراحی آماری[1]، طراحی اقتصادی[2] و طراحی آماری-اقتصادی[3] انجام می‌پذیرد. در طراحی آماری، (n,k,h) به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند که توان نمودار برای پی‌بردن به وجود یک تغییر خاص در مشخصه‌ی کیفیت و همچنین احتمال ارتکاب خطای نوع اول دارای کران خاصی باشد.

در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل هدف اصلی، تعیین بهینه‌ی پارامترهای طراحی برای کاهش هزینه است. در این ارتباط باید متذکر شد که طراحی آماری، هر چند نمودارهایی با توان بالا و نرخ خطای نوع اول پایین برای کشف تغییر خاص در فرآیند، تولید می‌کند، اما این طراحی‌ها عواقب اقتصادی داشته و هزینه‌های بیش‌تری را نسبت به طراحی‌های اقتصادی تحمیل می‌کنند. این در حالی است که، از آن‌جا که طراحی‌های اقتصادی فقط هزینه را در نظر می‌گیرند از خواص آماری نمودارهای کنترل شامل خطای نوع اول و توان نمودار غافل می‌مانند.

مونتگمری [1]، به مروری بر مطالعه‌های صورت گرفته در زمینه‌ی طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل پرداخت. با توجه به کمبودهای موجود در طراحی آماری و طراحی اقتصادی، نیاز به طراحی نوینی برای نمودارهای کنترل احساس شد که علاوه بر خواص آماری، جنبه‌های اقتصادی را نیز در نظر بگیرد. در این ارتباط، سانیگا [2] ضعف طراحی آماری و طراحی اقتصادی را با بسط روشی برطرف نمود و آن را طراحی آماری اقتصادی نامید. این طراحی عیب‌های طراحی آماری و طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل را با در نظر گرفتن همزمان جنبه‌های آماری و اقتصادی برطرف می‌کند. در واقع، طراحی آماری-اقتصادی محدود شده‌ی طراحی اقتصادی است که با قراردادن محدودیت‌های آماری (با توجه به نیاز طراحی) روی طراحی اقتصادی حاصل می‌شود. به واسطه‌ی همین محدودیت‌های آماری، طراحی‌های آماری-اقتصادی ممکن است هزینه‌ی بیش‌تری را نسبت به طراحی‌های اقتصادی به سامانه تحمیل کنند، اما به دلیل پایین بودن نرخ هشدارهای اشتباه از انتقادهای وودال [3]، مبرا هستند.

در برخی از فرآیندهای تولید و سرویس‌دهی در صنعت، متغیرهایی که باید کنترل شوند، به‌طور ذاتی، چندمتغیره وهمبسته هستند و از این رو سازمان‌ها ناگزیر به استفاده از روش‌های کنترل کیفیت چندمتغیره می‌باشند. در میان نمودارهای کنترل چندمتغیره، نمودار کنترل T^2-هتلینگ به دلیل سادگی در فهم و به‌کارگیری آن برای کاربران و همچنین به دلیل شباهت زیاد آن به نمودار کنترل تك متغیره از محبوبیت بیش‌تری برخوردار است. این نمودار، توسط بسیاری از پژوهشگران از جمله آپاراسی و هارو [4]، فراز و همکاران [5]، سیف و همکاران [6]، سیف و همکاران [7]، سیف [8] و... به حالت‌های مختلف طرح نمونه‌گیری با نرخ متغیر توسعه داده شد.

در طراحی معمول، یعنی طراحی با نرخ نمونه‌گیری ثابت[4]، پارامترهای نمودار کنترل در طول پایش فرآیند، ثابت می‌باشند، این در حالی است که هرگاه یکی از پارامترهای نمودار بر اساس مقدارهای حاصل از آماره‌ی نمونه‌ای انتخاب شود نمودار کنترل را نمودار کنترل تطبیقی می‌نامند. نمودارهای کنترل تطبیقی معمولا انحراف‌ها را سریع‌تر از نوع سنتی خود شناسایی کرده و از تولید بیش از اندازه محصول معیوب جلوگیری می‌نمایند. این نمودارها به فراخور نوع رویکرد و موقعیت قرارگیری آماره قبلی بر روی نمودار، اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری، ضریب حدود کنترل و یا ترکیبی از آن‌ها را تغییر می‌دهند. اگر فاصله‌ی نمونه‌گیری تابعی از مقدار آماره‌ی نمونه‌ای در نمونه‌گیری قبلی باشد آنگاه نمودار کنترل را با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر[5] گویند. بای و لی [9] اولین طرح اقتصادی نمودار کنترل $\overline{X}$ را درحالت *VSI* پیشنهاد دادند. طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $\overline{X}$ نیز مورد توجه پژوهشگران متعددی قرار گرفت. سیف و همکاران [6]، نمودار $\overline{X}$ را با در نظر گرفتن مشخصه‌ی کیفی غیر نرمال طراحی کردند. در این مطالعه، از توزیع بر به‌عنوان مدلی برای توزیع متغیر کیفیت فرآیند استفاده شد. از آن‌جا که این توزیع، به‌دلیل انعطاف‌پذیری مولفه‌هایش می‌تواند بسیاری از توزیع‌ها، ازجمله توزیع نرمال را مدل‌سازی کند، این مطالعه را در حوزه طراحی‌های نمودار کنترل، می‌توان در زمره یک پژوهش توزیع-آزاد یا ناپارمتری به حساب آورد. برای مروری بر کارهای دیگر در زمینه طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $\overline{X}$، می‌توان به سعادت ملی و همکاران [10]،

[1] Statistical Design (SD)
[2] Economic Design (ED)
[3] Economic- Statistical Design (ESD)
[4] Fixed Rate Sampling (FRS)
[5] Variable Sampling Interval (VSI)

نادری و همکاران [11]، عبدالمحمدی و همکاران [12] و... رجوع کرد. استفاده از رهیافت کلاسیک در نمودارهای کنترل مستلزم این است که هنگامی مشخصه‌ی کیفیت خارج از حدود فنی مشخصه‌ی کیفیت قرار گیرد، زیان کیفیت به‌عنوان هزینه در نظر گرفته شود و همه‌ی محصول‌های داخل حدود فنی مشخصه‌ی کیفیت، بدون توجه به انحراف مشخصه‌ی کیفیت از مقدار هدف، دارای کیفیت مشابه قلمداد شوند؛ اما این با واقعیت چندان سازگار نیست، زیرا هر انحراف از مقدار هدف، مشتری را متحمل زیانی متناسب با آن انحراف می‌کند. در رویکرد مشارکت تابع زیان در طراحی، بین محصول‌هایی که داخل حدود فنی مشخصه‌ی کیفیت قرار دارند تفاوت قایل می‌شود. محصول‌هایی که به مقدار هدف مشخصه‌ی کیفیت نزدیک‌تر هستند نسبت به محصول‌هایی که به حدود فنی بالایی و یا پایینی مشخصه‌ی کیفیت نزدیک هستند زیان کم‌تری را ایجاد می‌کنند. تاگوچی و همکاران [13]، طرحی اقتصادی برای تعیین بازه تشخیص و حدود کنترل یک سیستم تولیدی را با استفاده از تابع زیان ارایه نمودند. در حالت چند متغیره که کیفیت محصول با استفاده از چند ویژگی مورد بررسی قرار می‌گیرد نیز برخی از پژوهشگران از رویکرد تابع زیان در طراحی نمودارهای کنترل چند متغیره استفاده کرده‌اند. چو و همکاران [14] و سرل [15] از جمله این پژوهشگران هستند.

در این مقاله برای اولین بار در ادبیات موضوع در تعیین متوسط هزینه‌ی تولید محصول نامنطبق در حالتی که بیش از یک مشخصه‌ی کیفیت مورد ارزیابی قرار می‌گیرند، از تابع زیان نرمال انعکاسی استفاده می‌شود. در این مطالعه طراحی نمودار کنترل T^2 با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر چندگانه ($MVSI\,T^2$) (حالت چندمتغیره) با تکیه بر مفهوم زنجیر مارکوف و تابع زیان نرمال انعکاسی و با در نظر گرفتن مدل شوک نمایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای دستیابی به طراحی آماری-اقتصادی این نمودارها، باید قیدهای آماری به مدل اقتصادی اضافه شوند که این امر منجر به مساله‌ی تصمیم با متغیرهای آمیخته و فضای غیر محدب و ناپیوسته می‌شود. به‌همین دلیل از الگوریتم ژنتیک برای حل این مساله بهینه‌سازی استفاده می‌شود.

۲- طراحی نمودار کنترل $FRST^2$

در این بخش، در طراحی نمودار کنترل T^2 پارامترهای نمودار کنترل یعنی (n,h,k) ثابت فرض می‌شود. در ادبیات موضوع این رویکرد را نمودار کنترل T^2 با نرخ نمونه‌گیری ثابت($FRST^2$)[1] می‌نامند.

به‌منظور پایش و کنترل فرآیندهایی با مشخصه‌های کیفی وابسته از نمودار T^2 هتلینگ استفاده می‌شود. فرض کنید بردار X دارای توزیع نرمال p بعدی ($X\sim N_p(\mu,\Sigma_0)$) و تعداد m نمونه، هر کدام به اندازه‌ی $n>1$ نیز در دسترس باشد. یک نمودار کنترل می‌تواند مبتنی بر دنباله‌ای باشد که از آماره زیر نشات می‌گیرد:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu)\,\Sigma_0^{-1}\,\bar{X}_i - \mu), \qquad i = 1,2,\dots,m. \tag{۱}$$

در رابطه بالا، μ و Σ_0 به‌ترتیب بردار معلوم میانگین‌ها و ماتریس معلوم واریانس-کوواریانس می‌باشند و $\bar{X}_i$ بردار میانگین‌های نمونه‌ی زیر گروه منطقی ith می‌باشد به‌طوری که:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}, \qquad i = 1,2,\dots,m, \tag{۲}$$

که X_{ij}، j نمونه در زیر گروه منطقی ith است و برداری است که شامل p مشخصه‌ی کیفیت اندازه‌گیری شده از محصول تولیدی است. نمودار T^2-هتلینگ بر بردار میانگین فرآیند مشخصه‌های کیفیت نظارت می‌کند و به‌محض اینکه آماره‌ی نمونه‌ایی هر زیر گروه منطقی بیش‌تر از حد بالایی کنترل باشد $\left(T_i^2 \geq k\right)$، نمودار هشداری دال بر خارج از کنترل بودن فرآیند اعلام می‌دارد. در این‌صورت احتمال خطای نوع اول برابر است با

$$\alpha = P_{\mu=\mu_0}(T_i^2 > k). \tag{۳}$$

در صورتی‌که بردار میانگین و ماتریس واریانس-کوواریانس معلوم فرض شوند آماره‌ی T_i^2 از توزیع $\chi^2(p)$ پیروی می‌کند. در این صورت حد بالایی کنترل نمودار T^2-هتلینگ، نقطه‌ی α درصدی بالای توزیع χ^2 با p درجه آزادی، $\chi_\alpha^2(p)$ ، است، یعنی $k = \chi_\alpha^2(p)$.

[1] Fixed ratio sampling

در حالت تحت کنترل $\mu = \mu_0 = (\mu_{01}, \ldots, \mu_{0p})'$ و بعد از رخ‌دادن انحراف با دلیل در میانگین فرآیند، $\mu = \mu_1 = (\mu_{11}, \ldots, \mu_{1p})'$، که در این حالت **آماره (۲)** دارای توزیع خی‌دو غیر مرکزی با پارامتر غیرمرکزی زیر است:

$$\eta = n(\mu_1 - \mu_0)\,\Sigma_0^{-1}\,\mu_1 - \mu_0) = n\,d^2,$$

که در آن $d = \sqrt{(\mu_1 - \mu_0)'\,\Sigma_0^{-1}(\mu_1 - \mu_0)}$.

سرعت کشف تغییر در میانگین فرآیند در نمودار کنترل کارایی آماری نمودار کنترل را اندازه می‌گیرد. وقتی فاصله نمونه‌گیری یک مقدار ثابت باشد سرعت کشف تغییر در میانگین فرآیند از طریق ARL اندازه‌گیری می‌شود. باید توجه داشت تعداد نمونه‌های لازم در حالت خارج از کنترل تا صدور هشدار صحیح دارای توزیع هندسی با احتمال موفقیت $1 - \beta$ است. یعنی

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}, \qquad (۴)$$

که در آن β احتمال خطای نوع دوم است و به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\beta = P_{\mu=\mu_1}\,T^2 < k) = F\,k, p, \eta). \qquad (۵)$$

$F(k, p, \eta)$ تابع توزیع تجمعی توزیع خی دو غیر مرکزی با پارامتر غیر مرکزی η و p درجه آزادی در نقطه‌ی k می‌باشد.

اگر τ متوسط فاصله زمانی بین آخرین نمونه در حالت تحت کنترل و وقوع انحراف با دلیل باشد آنگاه:

$$\tau = \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})}. \qquad (۶)$$

در نتیجه $AATS$، متوسط زمان تعدیل شده از رخ دادن انحراف با دلیل تا صدور هشدار صحیح، برابر است با

$$AATS = h\left(\frac{1}{1-\beta}\right) - \tau, \qquad (۷)$$

۳- طراحی نمودار کنترل MVSIT^2

در طراحی نمودار کنترل T^2 با فاصله‌های نمونه‌گیری چندگانه ($MVSIT^2$) پذیره‌های نمودار کنترل$FRST^2$ لحاظ می‌شود. علاوه بر آن فرض می‌شود پهنای حدود کنترل به‌صورت زیر به m ناحیه مجزا از هم تقسیم شود:

$$[0, k) = [0, w_{m-1}) \cup [\,w_{m-1}, w_{m-2}) \cup \ldots \cup [w_1, k). \qquad (۸)$$

همچنین $h_1, h_2, \ldots, h_m$، m فاصله‌ی نمونه‌گیری مجزا از هم هستند به‌طوری‌که $h_1 < h_2 < \cdots < h_m$ و $(m \geq 2)$. تصمیم برای استفاده از هر یک از فاصله‌های نمونه‌گیری به موقعیت آماره‌ی نمونه‌ی قبلی بستگی دارد. اگر در نمونه‌ی قبلی مقدار آماره در ناحیه‌ی $[w_1, k)$ قرار گرفته باشد از کوچک‌ترین فاصله‌ی نمونه‌گیری و اگر در ناحیه $[0, w_{m-1})$ باشد از بزرگ‌ترین فاصله‌ی نمونه‌گیری استفاده می‌شود. همچنین اگر مقدار آماره در نمونه‌ی قبلی در ناحیه $\left[w_{m-j}, w_{m-j-1}\right); j = 1, \ldots, m-2$ قرار گیرد از h_{m-j} به‌عنوان فاصله نمونه‌گیری استفاده خواهدشد. تابع زیر چگونگی انتخاب فاصله نمونه‌گیری در طرح $MVSIT^2$ را توصیف می‌کند:

$$h_i = \begin{cases} h_m & 0 \leq T_{i-1}^2 < w_{m-1}, \\ h_{m-1} & w_{m-1} \leq T_{i-1}^2 < w_{m-2}, \\ \vdots & \vdots \\ h_2 & w_2 \leq T_{i-1}^2 < w_1, \\ h_1 & w_1 \leq T_{i-1}^2 < k. \end{cases} \qquad (۹)$$

در طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل چندمتغیره T^2 با فاصله‌های نمونه‌گیری متغیر ($MVSIT^2$) باید $(2m+1)$ پارامتر $(k, n, w_1, , w_{m-1}, \dots, h_1, \dots, h_m)$ را طوری تعیین کرد که علاوه‌بر مینیمم شدن هزینه‌های مربوط به پایش فرآیند، نمودار از لحاظ آماری نیز عملکرد قابل قبولی داشته باشد. در این راستا احتمال‌های شرطی قرار گرفتن آماره‌ی T^2 در خارج از حدود کنترل به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\alpha = P_{\mu=\mu_0}\ T^2 > k) = 1 - F\ k, p, 0). \quad (۱۰)$$

$$\pi = 1 - \beta = P_{\mu=\mu_1}\ T^2 > k) = 1 - F\ k, p, \eta), \quad (۱۱)$$

که در آن α احتمال خطای نوع اول، π توان آزمون و β احتمال خطای نوع دوم است. همچنین $F\ k, p, \eta)$ نشان دهنده‌ی تابع توزیع تجمعی خی‌دو غیرمرکزی با p درجه آزادی و پارامتر غیرمرکزی $\eta = nd^2$ در نقطه‌ی k می‌باشد. همچنین فرض کنید P_{0j} احتمال شرطی قرارگرفتن آماره‌ی T_i^2 در ناحیه‌ی $[w_{j+1}, w_j)$ باشد به شرط اینکه می‌دانیم T_i^2 درون حدود کنترل قرار دارد و میانگین فرآیند نیز تحت کنترل است و به طور مشابه P_{1j} احتمال شرطی قرارگرفتن آماره‌ی T_i^2 در ناحیه‌ی $[w_{j+1}, w_j)$ باشد به شرط اینکه می‌دانیم T_i^2 درون حدود کنترل قرار دارد و میانگین فرآیند خارج از کنترل است. این احتمال‌های شرطی به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$P_{01} = P_{\mu=\mu_0}\ w_1 < T^2 < k |\ 0 < T^2 < k\ ) = \frac{F\ k, p, 0) - F(w_1, p, 0)}{1 - \alpha}. \quad (۱۲)$$

$$P_{0j} = P_{\mu=\mu_0}\left(w_{j+1} < T^2 < w_j | 0 < T^2 < k\right) = \frac{F\left(w_j, p, 0\right) - F\left(w_{j+1}, p, 0\right)}{1 - \alpha}. \quad (۱۳)$$

$$P_{0m} = P_{\mu=\mu_0}\ 0 < T^2 < w_{m-1} | 0 < T^2 < k\ ) = \frac{F\ w_{m-1}, p, 0)}{1 - \alpha}. \quad (۱۴)$$

$$P_{11} = P_{\mu=\mu_1}\ w_1 < T^2 < k | 0 < T^2 < k\ ) = \frac{F\ k, p, \eta) - F\ w_1, p, \eta)}{1 - \pi}. \quad (۱۵)$$

$$P_{1j} = P_{\mu=\mu_1}\left(w_{j+1} < T^2 < w_j | 0 < T^2 < k\right) = \frac{F\left(w_j, p, \eta\right) - F\left(w_{j+1}, p, \eta\right)}{1 - \pi}. \quad (۱۶)$$

$$P_{1m} = P_{\mu=\mu_1}\ 0 < T^2 < w_{m-1} | 0 < T^2 < k\ ) = \frac{F\ w_{m-1}, p, \eta)}{1 - \pi}, \quad (۱۷)$$

که در آن $j = 1,2, \dots, m-2$.

به‌راحتی می‌توان نشان داد متوسط زمان تعدیل شده از رخ دادن انحراف با دلیل تا صدور هشدار صحیح به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$AATS = \frac{1}{(\sum\ h_j P_{0j})} \sum_{j=1}^{m} \frac{h_j P_{0j}\left(\lambda h_j - 1 + e^{-\lambda h_j}\right)}{\lambda\left(1 - e^{-\lambda h_j}\right)} +\ ARL_1 - 1) \sum_{j=1}^{m} h_j P_{1j}. \quad (۱۸)$$

فرض کنید ANS_0 متوسط تعداد نمونه‌های استخراج شده در حالت تحت کنترل باشد. بای و لی [9] نشان دادند:

$$ANS_0 = \frac{\sum_{j=1}^{m} P_{0j} e^{-\lambda h_j}}{(1 - \sum_{j=1}^{m} P_{0j} e^{-\lambda h_j})^2} \sum_{j=1}^{m} P_{0j}(1 - e^{-\lambda h_j}). \quad (۱۹)$$

متوسط تعداد هشدارهای اشتباه نیز برابر است با

$$ANF = \alpha ANS_0. \quad (۲۰)$$

۴- مدل هزینه

۴-۱- نمادها

پارامترهای استفاده شده در مدل هزینه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

T_0: متوسط زمان صرف شده برای جست‌وجو و کشف یک هشدار اشتباه است.

T_1: متوسط زمان صرف‌شده برای کشف و تعمیر یک انحراف با دلیل است.

C_0: هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنطبق مادامی که فرایند تحت کنترل است.

C_1: هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنطبق مادامی که فرایند خارج از کنترل است.

a_3': هزینه برریسک هشدار اشتباه است.

a_3: هزینه بررسی، کشف و اصلاح انحراف با دلیل است.

a_1 و a_2: هزینه‌های ثابت و متغیر نمونه‌گیری است.

۲-۴- پذیره‌ها

برای بناسازی مدل هزینه برای نمودار کنترل $MVSIT^2$ پذیره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. p مشخصه کیفیت دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین μ و ماتریس واریانس-کوواریانس Σ_0 است.
۲. در حالت تحت کنترل فرض می‌شود $\mu = \mu_0$.
۳. یک انحراف با دلیل منجر به تغییر یا انتقال میانگین فرآیند (μ) از μ_0 به μ_1 خواهد شد. فاصله‌ی ایجاد شده در اثر این انتقال، فاصله ماهالانوبیس در نظر گرفته می‌شود. این انحراف تنها روی میانگین فرآیند اثر می‌گذارد و ماتریس واریانس-کوواریانس در کل دوره ثابت است.
۴. فرض می‌شود که انحراف با دلیل براساس یک فرآیند پواسون با میزان متوسط λ مشاهده در ساعت رخ می‌دهد. به‌عبارت دیگر با فرض اینکه فرآیند در حالت تحت کنترل شروع به‌کار می‌کند، مدت زمانی که فرآیند در حالت تحت کنترل باقی می‌ماند یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ ساعت خواهد بود.
۵. فرآیند خود اصلاح نیست. به عبارتی دیگر چنان‌چه فرآیند از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل انتقال یابد، فقط در صورت دخالت یک عامل انسانی مجددا به حالت تحت کنترل بازخواهد گشت.
۶. چرخه‌ی کیفیت در حالت تحت کنترل شروع می‌شود و تا تعمیر فرآیند (بعد از اعلام یک هشدار صحیح) ادامه می‌یابد. فرض می‌شود چرخه کیفیت یک فرآیند تجدید پاداش است.
۷. در زمان رخ دادن هشدار اشتباه و یا هشدار صحیح فرآیند متوقف است.

۳-۴- تابع هزینه

در این قسمت برای طراحی اقتصادی نمودار کنترل $MVSIT^2$ از مدل هزینه‌ی چیو [16] استفاده می‌شود. این مدل از هزینه‌های فرآیند در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل، هزینه‌ی نمونه‌گیری و کشف و تعمیر هشدارهای اشتباه تشکیل شده‌است. رویکرد سنتی اقتصادی نمودارهای کنترل، حداقل کردن هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان است که با توجه به فرآیند تجدید پاداش متوسط هزینه در واحد زمان، $E(A)$، به‌صورت نسبت هزینه‌ی مورد انتظار در چرخه، $E(C)$، بر زمان مورد انتظار چرخه، $E(T)$، به‌دست می‌آید، یعنی

$$E\ A) = \frac{E\ C)}{E\ T)}, \qquad (۲۱)$$

که در آن

$$E\ C) = C_0(\frac{1}{\lambda}) + C_1(AATS) + a_3'\ ANF + a_3 + (a_1 + a_2\ n)\ ANS_0 + ARL_1). \qquad (۲۲)$$

$$E\ T) = \frac{1}{\lambda} + AATS + T_0\ ANF + T_1. \qquad (۲۳)$$

۵- استفاده از رهیافت تابع زیان در براورد هزینه

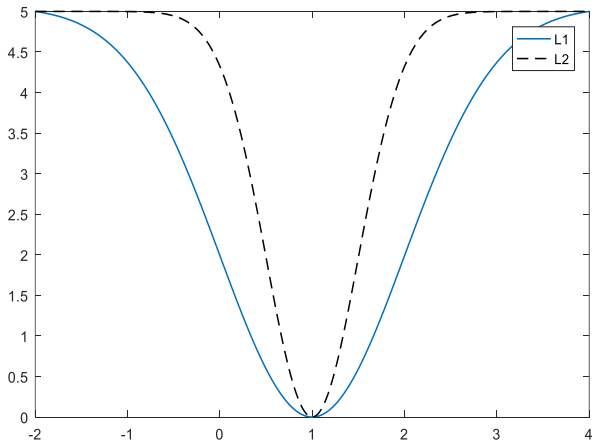
اسپیرینگ [17] یک تابع زیان جدید و ساده را بر اساس انعکاسی از تابع چگالی نرمال نسبت به محور افقی به‌صورت زیر ارایه کرد:

$$L\ x;t) = K\left(1 - e^{-\frac{x-t)^2}{2\gamma^2}}\right), \gamma \neq 0, \qquad (۲۴)$$

که در آن X مشخصه‌ی کیفیت، t مقدار هدف مشخصه‌ی کیفیت، γ پارامتر شکل و K ضریب زیان کیفیت را نشان می‌دهد، که بنا به ویژگی سوم تابع زیان کیفیت به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$K = \frac{A}{1 - e^{-\frac{\Delta^2}{2\gamma^2}}}, \qquad (۲۵)$$

که در آن Δ حد مجاز تلورانس حول مقدار هدف و A هزینه‌ی امحا یا دوباره‌کاری یک محصول نامنطبق در نقاط $t \pm \Delta$ می‌باشد. پارامتر شکل امکان اصلاح تابع زیان برای منعکس کردن زیان‌های متفاوت که برای فرآیندهای مختلف وجود دارد را فراهم می‌کند. برای فرآیندهایی که در یک ناحیه گسترده در اطراف مقدار هدف، کاهش کیفیت روندی آهسته دارد پارامتر شکل بزرگ‌تر از حالتی است که برای انحراف‌های کوچک از مقدار هدف، تغییرهای بزرگ‌تری رخ می‌دهد. در واقع پارامتر شکل با توجه به کاربرد تابع زیان در صنعت خاص، قادر است که واکنش تابع زیان نسبت به انحراف از مقدار هدف را تنظیم کند. به‌عنوان مثال فرض کنید هزینه امحای یک محصول نامنطبق ۵ دلار ($A = 5$)، مقدار هدف یک ($T = 1$ و حد مجاز تلورانس ۳ باشد ($\Delta = 3$). اگر L_1 تابع زیان نرمال انعکاسی برای $\gamma = 1$ و L_2 تابع زیان نرمال انعکاسی برای $\gamma = 0/5$ باشد آنگاه **شکل ۲** اثر پارامتر شکل بر تابع زیان را به‌وضوح نشان می‌دهد. هر چه پارامتر شکل بزرگ‌تر باشد واکنش تابع زیان نسبت به انحراف از مقدار هدف کم‌تر می‌شود. در واقع پارامتر شکل چگونگی توزیع زیان حول مقدار هدف را مشخص می‌کند.



شکل ۱- تاثیر پارامتر شکل بر تابع زیان نرمال انعکاسی.

Figure 1- Effect of shape parameter on the reflection normal loss function.

تابع زیان نرمال انعکاسی برای حالتی که دو مشخصه کیفیت در ارزیابی زیان مورد توجه قرار گیرند، نیز به‌کار می‌رود. شکل کلی این تابع زیان در حالت دو متغیره به‌صورت زیر است:

$$L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t})) = K\left(1 - e^{-\ y-t)'\Gamma^{-1}\ y-t)}\right), \qquad (۲۶)$$

که در آن $\boldsymbol{y}$ بردار مشخصه‌های کیفیت، K ضریب زیان کیفیت، t بردار مقادیر هدف متاظر با هر یک از مشخصه‌ها و Γ ماتریس پارامترهای شکل می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathrm{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

اگر $\Delta = \Delta_1, \Delta_2)'$ بردار حدود مجاز تلورانس متناظر با مقادیر هدف باشد(Δ_1 حد مجاز تلورانس برای t_x و Δ_2 حد مجاز تلورانس برای t_y باشد) و A هزینه امحا یا دوباره کاری یک محصول نامنطبق در نقاط $\mathrm{t} \pm \Delta$ باشد، آنگاه بنا به ویژگی سوم تابع زیان کیفیت مقدار ضریب زیان کیفیت به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L\ t - \Delta; t) = L\ t + \Delta; t) = A.$$

بنابراین،

$$K\left(1 - e^{-\Delta' \Gamma^{-1} \Delta}\right) = A.$$

یا

$$K = \frac{A}{1 - e^{-\Delta' \Gamma^{-1} \Delta}}. \qquad (۲۷)$$

در این مطالعه برای اولین بار در ادبیات موضوع در تعیین متوسط هزینه‌ی تولید محصول نامنطبق در حالتی‌که دو مشخصه‌ی کیفیت مورد ارزیابی قرار می‌گیرند، از تابع زیان نرمال انعکاسی استفاده می‌شود. فرض کنید $\mathrm{y} \sim N_2\ \mu, \Sigma)$ بردار مشخصه‌های کیفیت باشد که در حالت تحت کنترل دارای بردار میانگین $\mu = \mu_0$ است. در این حالت متوسط هزینه تولید هر واحد محصول نامنطبق به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_0\ y; t) = E[L\ \mathrm{y}, \mathrm{t})] = E\left[K\left\{1 - exp\left(-\ \mathrm{y} - \mathrm{t})' \Gamma^{-1}\ \mathrm{y} - \mathrm{t})\right)\right\}\right]. \qquad (۲۸)$$

$$E\left[exp\left(-\ \mathrm{y} - \mathrm{t})' \Gamma^{-1}\ \mathrm{y} - \mathrm{t})\right)\right] = (2\pi)^{-1} |\Sigma|^{-1/2} \int exp\left\{\frac{-1}{2}[2\ \mathrm{y} - \mathrm{t})' \Gamma^{-1}\ \mathrm{y} - \mathrm{t}) + \ \mathrm{y} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mathrm{y} - \mu_0)]\right\} dy.$$

$$= 2\pi)^{-1} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \int exp\left\{\frac{-1}{2}[2\ y - \eta)'\ \Sigma^{-1} + 2\Gamma^{-1})\ y - \eta) \quad + t - \mu_0)' \left(\Sigma + \frac{\Gamma}{2}\right)^{-1} (t - \mu_0)]\right\} = B\ exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\ t - \mu_0)' \left(\Sigma + \frac{\Gamma}{2}\right)^{-1} (t - \mu_0)]\right\}\right], \qquad (۲۹)$$

که در آن

$$\eta = \left(\Sigma^{-1} + 2\Gamma^{-1}\right)^{-1} \left(\Sigma^{-1} \mu_0 + 2\Gamma^{-1} t\right), \qquad B = \left|I + 2\ \Sigma\Gamma^{-1}\right|^{\frac{-1}{2}}.$$

به قسمی که $\left|\mathrm{I} + 2\ \Sigma\Gamma^{-1}\right| > 0$؛ بنابراین

$$R_0\ y, t) = K\left(1 - \mathrm{B} \exp\left\{\frac{-1}{2}\left[\ \mathrm{t} - \mu_0)' \left(\Sigma + \frac{\Gamma}{2}\right)^{-1}\ \mathrm{t} - \mu_0)\right]\right\}\right), \qquad (۳۰)$$

و در حالت خارج از کنترل که $\mathrm{y} \sim N_2\ \mu_1, \Sigma)$، متوسط هزینه تولید محصول نامنطبق برابر است با

$$R_1(y, t) = K\left(1 - B\ exp\left\{\frac{-1}{2}\left[\ t - \mu_1)' \left(\Sigma + \frac{\Gamma}{2}\right)^{-1}\ t - \mu_1)\right]\right\}\right). \qquad (۳۱)$$

اگر تعداد محصول‌های تولید شده در هر ساعت را با Pr نشان دهیم آن‌گاه متوسط هزینه‌ی تولید محصول در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل در هر ساعت به صورت $C_0 = R_0(y, t)\ Pr$ و $C_1 = R_1(y, t)\ Pr$ می‌باشند.

۶- بهینه‌سازی و طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل RNLMVSIT^2

هدف از طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $RNLMVSIT^2$ یافتن $(2m+1)$ پارامتر نمودار کنترل به شرح زیر می‌باشد:

$$k, n, w_1, , w_{m-1}, \ldots, h_1, \ldots, h_m).$$

به قسمی است که **رابطه (۲۰)** با توجه به محدودیت‌های آماری مربوط به ANF و $AATS$ مینیمم شود. در چنین وضعیتی پارامترهای فرآیند $(\lambda, \mu, \Sigma, T_0, T_1)$ و پارامترهای هزینه $(C_0, C_1, a_2, a_3, a_3')$ معلوم فرض می‌شوند. مقادیر (C_0, C_1) با لحاظ نمودن تابع زیان نرمال انعکاسی و **روابط (۳۰)** و **(۳۱)** تعیین می‌شود:

$$C_1 = R_1\ y, t)Pr, \quad C_0 = R_0\ y, t)Pr.$$

در بین $(2m+1)$ پارامتر موجود، n یک مقدار گسسته است که $1 \le n < h_1 Pr$ و دیگر پارامترهای طراحی نمودار مقدارهایی پیوسته اختیار می‌کنند.

با در نظر گرفتن شرایط واقعی در یک فرآیند تولید، حداکثر مقدار فاصله‌ی نمونه‌گیری ۸ ساعت و حداقل آن ۶ دقیقه در نظر گرفته می‌شود. اگر Pr تعداد کل محصول‌های تولیدشده در یک ساعت باشد، آنگاه مساله بهینه‌سازی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} & min\ E\ A) \qquad (۳۲) \\ & s.t \\ & 0/01 \le w_{m-1} < w_{m-2} < \ldots < w_1 < k, \\ & 0/1 \le h_1 < h_2 < \ldots < h_m \le 8, \\ & 1 \le n < h_1 Pr, \\ & ANF \le ANF_0\ , \\ & AATS \le AATS_1. \end{aligned}$$

به وضوح قید $ANF \le ANF_0$ برای غلبه بر زنگ خطرهای اشتباهی نمودارهای اقتصادی و قید $AATS \le AATS_1$ به منظور تسریع در کشف تغییرهای فرآیند در نظر گرفته می‌شود. مساله بهینه‌سازی فوق دارای متغیرهای تصمیم گسسته و پیوسته است که هرکدام محدودیت‌های خاص خود را دارند. لذا برای بهینه‌سازی پارامترهای طراحی از روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک استفاده می‌شود.

۷- کاربرد صنعتی

در این بخش، کاربرد مدل از طریق یک نمونه‌ی صنعتی نشان داده می‌شود. یک محصول با دو ویژگی مهم کیفیت را در نظر بگیرید که باید به‌طور مشترک تحت کنترل و نظارت باشند $(p = 2)$. هزینه‌های ثابت و متغیر نمونه‌گیری به ترتیب ۴ و ۵ دلار $(a_1 = 4, a_2 = 5)$، هزینه کشف و حذف انحراف با دلیل ۱۰۰۰ دلار $(a_3 = 1000)$ و هزینه هشدار اشتباه ۱۵۰۰دلار $(a_3' = 1500)$ در نظر گرفته شده‌است. متوسط زمان تحت کنترل فرآیند برابر با ۱۰۰ ساعت $(\lambda = 0/01)$ و تعداد محصول‌های تولید شده در یک ساعت ۲۰۰ واحد می‌باشد $(Pr = 200)$. متوسط زمان لازم برای جست‌وجوی هشدار اشتباه ۰/۱۶ ساعت $(T_0 = 0/16)$ و متوسط زمان لازم برای کشف انحراف با دلیل و اصلاح فرآیند ۲ ساعت است $(T_1 = 2)$. در این مطالعه مقدار ANF_0، برابر با ۰/۵ و مقدار $AATS_1$ برابر با ۱/۵ اختیار شده‌است.

فرض کنید (X, Y) دو مشخصه‌ی کیفیت هستند که با فرض تحت کنترل بودن فرآیند دارای توزیع زیر هستند:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim BN\left(\mu_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1) \\ 1 & 9) \end{pmatrix} \right), \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1/8) \\ 3/1) \end{pmatrix}. \qquad (۳۳)$$

همچنین فرض می‌کنیم وقتی فرآیند در حالت خارج از کنترل قرار می‌گیرد، میانگین فرآیند به $\mu_1 = \begin{pmatrix}2+\delta_1\\3+\delta_2\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد که در آن δ_1 و δ_2 مقادیر ۰/۷۵، ۱، ۱/۲۵، ۱/۵ و ۲ را اختیار می‌کنند. فرض کنید هزینه امحا یا دوباره‌کاری یک واحد محصول نامنطبق برابر ۳ دلار باشد ($A = 3$) که در فاصله ۱/۷ واحدی از مقدار هدف در امتداد محور xها ($\Delta_1 = 1/7$) و در فاصله‌ی ۲/۵ واحدی از مقدار هدف در امتداد محور yها رخ می‌دهد ($\Delta_2 = 2/5$)؛ همچنین پارامترهای شکل به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\Gamma = \begin{pmatrix}1/2 & 1\\1 & 1/6\end{pmatrix}. \qquad (۳۴)$$

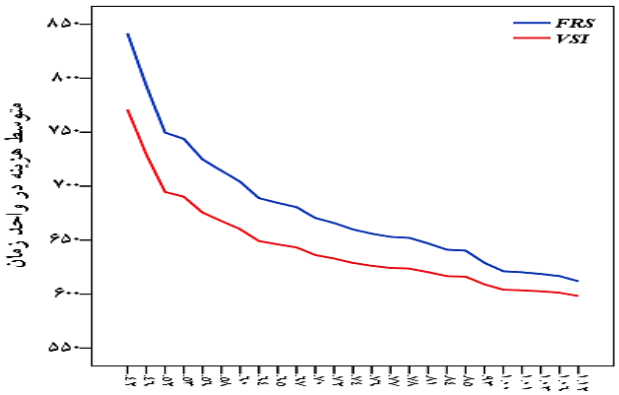
جدول ۱، مقدارهای ممکن برای طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $FRST^2$ را نشان می‌دهد و **جدول ۲**، علاوه‌بر اینکه مقدارهای ممکن طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $MVSIT^2$ برای حالت $m = 2$ را ارایه می‌دهد، به مقایسه بین طرح‌های مذکور نیز می‌پردازد و درصد کاهش متوسط هزینه به‌ازای هریک از مقدارهای ممکن تغییر در میانگین فرآیند را نشان می‌دهد. این درصد بهبود در صرفه‌جویی هزینه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$PS = \frac{E\ A)_{FRS} - E\ A)_{VSI}}{E\ A)_{FRS}} \times 100. \qquad (۳۵)$$

سیف [6] عملکرد نمودار کنترل $MVSIT^2$ را برای حالت‌های $m = 2$ و $m = 3$ مقایسه کرد و نشان داد که تعدد حدود هشدار، گرچه به‌صورت جریی عملکرد نمودار را بهتر می‌کند، اما به‌طور معناداری منجر به پیچیدگی مدل می‌شود. به همین منظور در طرح $MVSI$ استفاده از دو فاصله‌ی فاصله‌ی نمونه‌گیری کفایت می کند.

طبق نتایج ارایه شده در **جدول ۲** تا **جدول ۴** به‌عنوان مثال، اگر $d = 0/42$، مقدارهای بهینه برای بردار پارامترهای طرح به‌صورت $(k, w, h_1, h_2, n) = (13/72,\ 4/42, 0/41, 2/3, 82)$ می‌باشد. به‌ازای این بردار از مقدارها، متوسط هزینه‌ی طراحی مدل VSI برابر است با ۷۷۱ دلار که مقدار مشابه آن برای مدل FRS برابر است با ۸۴۱/۶۴، که حدود ۸/۴% باعث صرفه‌جویی در متوسط هزینه شده که عدد قابل توجهی است. نتیجه‌های موجود در **جدول ۲**، نشان می‌دهند که استفاده از طرح VSI نسبت به طرح FRS تقریبا به‌طور متوسط در هر ساعت ۵% در میزان هزینه‌ها صرفه‌جویی به‌عمل می‌آورد. اگر ۸ ساعت کار در یک روز و ۶ روز کاری در یک هفته و یا به‌عبارتی ۲۶ روز کاری را در یک ماه در نظر بگیریم؛ برای $d = 0/43$ برای یک خط تولید به‌طور سالانه ۱۷۶۳۱۷ دلار در متوسط هزینه‌ها صرفه‌جویی خواهیم داشت.

همچنین با مقایسه‌ی حجم نمونه‌ی استخراج شده بر اساس طرح‌های VSI و FRS می‌توان نتیجه گرفت که با استفاده از طرح VSI حجم نمونه‌ی استخراج شده به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد، که همین موضوع می‌تواند یکی از دلایل کاهش متوسط هزینه در این طراحی باشد. با توجه به **شکل ۱**، می‌توان نتیجه گرفت به‌ازای هر مقدار از انحراف، طرح VSI نسبت به طرح FRS عملکرد بهتری دارد. این برتری در میزان کاهش هزینه‌ها، به ازای انحراف‌های کوچک شدت بیشتری داشته و با افزایش میزان انحراف این شدت به مرور کاهش می‌یابد؛ بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که طرح VSI نسبت به طرح FRS در یافتن انحراف‌های کوچک خیلی بهتر عمل می‌کند و البته در انحراف‌های بزرگ نیز برتری خود را با اختلاف معناداری حفظ می‌کند.



شکل ۲- مقایسه نمودار کنترل $VSIT^2$ و $FRST^2$ بر اساس تابع زیان نرمال انعکاسی.

Figure 2- Comparison of VSIT2 and FRST2 control charts based on the normal reflection loss function.

۸- تاثیر پارامترهای زمان و هزینه بر روی پارامترهای طراحی

در این قسمت با استفاده از تحلیل حساسیت به روش طراحی آزمایش تاگوچی به بررسی تاثیر پارامترهای فرآیند و هزینه بر محاسبات و مقدار ضرر و زیان پرداخته می‌شود. در واقع تحلیل حساسیت به انتخاب مناسب پارامترهای ورودی مدل کمک می‌کند. این مرحله با یک طراحی آزمایش به روش تاگوچی محقق می‌شود که در آن پارامترهای هزینه و فرآیند به‌عنوان پارامترهای ورودی طرح در نظر گرفته می‌شوند. این طرح برای مدل طراحی شده بر اساس تابع زیان کیفیت نرمال انعکاسی دارای ۱۵پارامتر است که ۳ پارامتر دارای ۲ سطح و ۱۲ پارامتر دارای ۳ سطح می‌باشند که در **جدول ۳** ارایه شده‌اند. با توجه به سطوح متفاوت پارامترها از یک طرح آزمایش تاگوچی آمیخته با آرایه‌های متعامد L_{36} استفاده می‌شود که شامل ۳۶ آزمایش است. مقدارهای بهینه برای پارامترهای طراحی و متوسط هزینه در واحد زمان مربوط به پارامترهای بهینه در **جدول ۴** ارایه شده است.

جدول ۱- سطوح پارامترهای ورودی فرآیند در تحلیل حساسیت.
Table 1- Process input parameter levels in sensitivity analysis.

	سطح اول	سطح دوم	سطح سوم
T_0	0.16	0.7	-
T_1	0.75	2	-
a_1	2	8	-
a_2	3	5	12
a_3	500	1000	1500
a_3	800	1000	1200
λ	0.001	0.01	0.1
δ_1	0.75	1.5	2.25
δ_2	1	3	4.5
A	3	10	15
Δ_1	1	3	5
Δ_2	0.8	2.5	4
γ_1	1.2	1.9	2.7
γ_2	1	1.6	2.3
γ_{12}	0.3	0.8	1

در **جدول ۴**، تاثیر پارامترهای ورودی مدل روی طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $VSIT^2$ بر اساس تابع زیان کیفیت نرمال انعکاسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای هر کدام از ترکیب‌های پارامترهای ورودی در این جدول مدل آماری-اقتصادی بهینه‌سازی شده و پارامترهای بهینه‌ی طرح ارایه شده‌اند؛ بنابراین، تاثیر پارامترهای ورودی را روی میزان هزینه‌ی بهینه شده‌ی مدل و پارامترهای بهینه شده‌ی نمودار کنترل می‌توان تحلیل کرد. **شکل ۲** نیز در تحلیل این موضوع بسیار توانمند است. برخی از نتیجه‌های حاصل شده از این تحلیل‌ها به شرح زیر هستند:

۱. انحراف‌های بزرگ در میانگین فرآیند با نمونه‌هایی با حجم کوچک نیز قابل تشخیص هستند، از طرفی متوسط زمان تعدیل شده تا صدور هشدار صحیح نیز کاهش می‌یابد، منطقی است که تشخیص این انحراف‌ها زودتر صورت می‌گیرد. همین افزایش در میزان انحراف‌ها، پهنای حدود کنترل (k) را زیاد کرده و موجب بزرگ‌تر شدن ناحیه‌ی امن می‌شود. متوسط تعداد هشدارهای اشتباه نیز تحت تاثیر انحراف‌های بزرگ در میانگین، کاهش می‌یابد. متعاقبا با این تاثیرات، متوسط هزینه نیز کاهش می‌یابد.

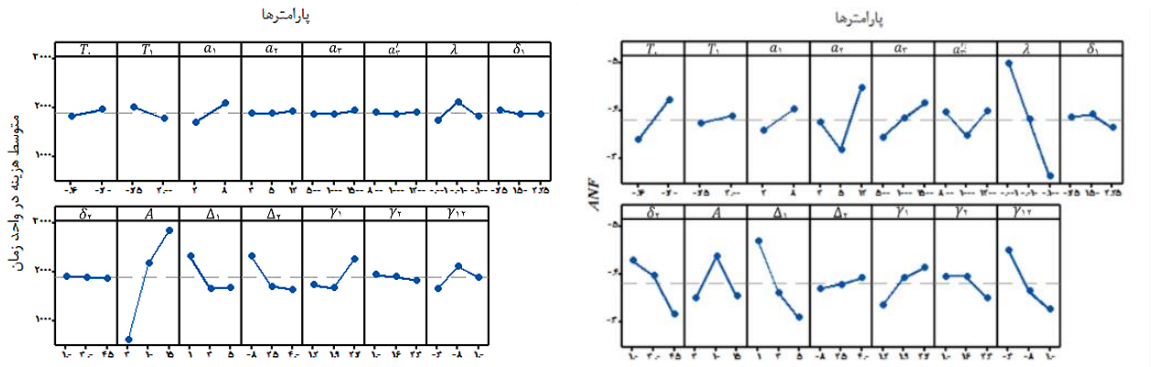
۲. با افزایش λ، به‌طور متوسط احتمال رخ‌دادن انحراف‌های با دلیل در میانگین بیش‌تر می‌شود و مدت زمانی‌که فرآیند در حالت تحت کنترل است کاهش می‌یابد. همچنین افزایش λ موجب کاهش متوسط تعداد هشدارهای اشتباه و کاهش متوسط زمان تعدیل شده تا هشدار صحیح نیز می‌شود. از طرفی با کاهش مدت زمان تحت کنترل، پهنای حدود کنترل و ناحیه‌ی امن کاهش می‌یابد و فاصله‌ی نمونه‌گیری نیز در این حالت کم‌تر می‌شود. اما با افزایش λ، حجم نمونه کاهش می‌یابد، یعنی اگر احتمال رخ‌دادن انحراف‌های با دلیل در میانگین بیش‌تر می‌شود با نمونه‌های کوچک هم می‌توان به وجود این انحراف‌ها پی برد.

۳. افزایش هزینه‌های نمونه‌گیری باعث افزایش متوسط هزینه می‌شود، همچنین این افزایش باعث کاهش پهنای حدود کنترل و در نتیجه موجب افزایش متوسط تعداد هشدارهای اشتباه نیز خواهد شد. با افزایش زمان لازم برای جست‌وجوی یک هشدار اشتباه، متوسط هزینه در واحد زمان افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش T_0، پهنای حدود کنترل و ناحیه‌ی امن کاهش یافته و متوسط تعداد هشدارهای اشتباه زیاد می‌شود. این افزایش همچنین موجب کاهش فاصله‌ی نمونه‌گیری می‌شود. همچنین با افزایش T_1 متوسط هزینه در واحد زمان کاهش می‌یابد.

۴. با افزایش حدود تلورانس، متوسط زمان تعدیل شده تا صدور هشدار صحیح افزایش می‌یابد، همچنین افزایش حدود تلورانس موجب کاهش متوسط هزینه در واحد زمان نیز می‌شود. به‌ازای مقادیر کوچک γ_{12} و γ_1 و مقادیر بزرگ γ_2 متوسط هزینه در واحد زمان کوچک می‌شود.

۹- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل چندمتغیره T^2 با فاصله نمونه‌گیری متغیر تحت تابع زیان چندمتغیره نرمال انعکاسی ($RNLMVSIT^2$) و بر پایه‌ی مدل اقتصادی چیو پرداخته و با استفاده از روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک مقادیر پارامترهای نمودار کنترل تعیین شد. معمولا در مدل‌های اقتصادی، هزینه‌های مربوط به تولید محصول نامنطبق در حالت‌های تحت کنترل و خارج از کنترل از قبل تعیین شده‌اند و به‌عنوان ورودی مدل معرفی می‌شوند. در طراحی انجام شده برای براورد هزینه‌های نامبرده، از تابع زیان چند متغیره نرمال انعکاسی استفاده شد. کاربرد و مزیت‌های نمودار برای سازمان‌های کاربر بر پایه یک مثال صنعتی برگرفته از ادبیات موضوع به تصویر کشیده شد. نتیجه‌های عددی نشان داد که طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $RNLMVSIT^2$ در تشخیص انحراف‌های کوچک بسیار بهتر از نمودارهای کنترل رایج عمل می‌کند. با استفاده از تحلیل حساسیت و رسم نمودارهای مربوطه، تاثیر پارامترهای ورودی مدل نیز بررسی شده که نتایج حاکی از آن است که پارامترهای تابع زیان بیشترین اثر و اهمیت را بر روی مقادیر بهینه نمودار کنترل دارند.



شکل ۳- تاثیر پارامترهای ورودی بر متوسط هزینه در واحد زمان و متوسط تعداد هشدارهای اشتباه.

Figure 3- The effect of input parameters on the average cost per unit of time and the average number of false alarms.

جدول ۲- طراحی آماری-اقتصادی نمودار کنترل $FRST^2$ بر اساس تابع زیان نرمال انعکاسی.

Table 2- Statistical-economic design of the $FRST^2$ control chart based on the normal reflection loss function.

d	k	h	n	ANF	AATS	E(A)
0.42	13.44	2.41	129	0.5	5.1	841.64
0.46	13.44	2.41	106	0.5	5.1	793.03
0.52	13.44	2.41	85	0.5	5.1	749.57
0.58	13.44	2.41	68	0.5	5.1	714.32
0.72	13.43	2.42	44	0.5	5.1	665.86
0.53	13.41	2.44	83	0.5	5.1	743.83
0.56	13.44	2.41	73	0.5	5.1	724.67
0.6	13.44	2.42	63	0.5	5.1	704.03

جدول ۲- ادامه.

Table 2- Continued.

d	k	h	n	ANF	AATS	E(A)
0.65	13.44	2.42	53	0.5	5.1	684.56
0.77	43.13	2.42	38	0.5	5.1	653.05
0.64	13.43	2.42	55	0.5	5.1	688.86
0.67	13.43	2.42	52	0.5	5.1	680.58
0.7	13.43	2.42	47	0.5	5.1	670.53
0.74	13.43	2.42	42	0.5	5.1	659.94
0.85	13.43	2.42	32	0.5	5.1	640.28
0.76	13.43	2.42	40	0.5	5.1	655.97
0.78	13.43	2.42	38	0.5	5.1	652.13
0.81	13.43	2.42	35	0.5	5.1	647.00
0.84	13.43	2.42	32	0.5	5.1	641.12
0.93	13.43	2.43	27	0.5	5.1	628.97
1	13.42	2.43	23	0.5	5.1	621.21
1.01	13.42	2.43	22	0.5	5.1	620.23
1.03	13.42	2.43	22	0.5	5.1	618.69
1.06	13.42	2.44	21	0.5	5.1	616.70
1.12	13.42	2.44	18	0.5	5.1	611.88

جدول ۳- طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترل $VSIT^2$ بر اساس تابع زیان نرمال انعکاسی (m=2).

Table 3- Statistical-economic design of $VSIT^2$ control chart based on normal reflection loss function (m=2).

d	k	w	h_1	h_2	n	ANF	AATS	E(A)	PS
0.42	13.72	4/42	0/41	2/30	82	0/50	1/50	771/00	8/4%
0.46	13.75	4/24	0/32	2/30	64	0/50	1/50	729/62	8/0%
0.52	13.77	4/08	0/25	2/32	49	0/50	1/50	694/63	7/3%
0.58	13.78	3/94	0/19	2/33	38	0/50	1/50	667/73	6/5%
0.72	13.79	3/77	0/12	2/36	24	0/50	1/50	632/99	4/9%
0.53	13.77	4/05	0/24	2/32	47	0/50	1/50	690/25	7/2%
0.56	13.78	3/98	0/21	2/33	41	0/50	1/50	675/48	6/8%
0.6	13.78	3/90	0/17	2/34	35	0/50	1/50	660/13	6/2%
0.65	13.79	3/83	0/15	2/35	29	0/50	1/50	646/08	5/6%
0.77	13.79	3/73	0/10	2/38	20	0/50	1/50	624/25	4/4%
0.64	13.79	3.85	0/15	2/35	30	0/50	1/50	649/15	5/8%
0.67	13.79	3/82	0/14	2/35	28	0/50	1/50	643/26	5/5%
0.7	13.79	3/79	0/12	2/36	25	0/50	1/50	636/22	5/1%
0.74	13.79	3/75	0/11	2/37	22	0/50	1/50	628/92	4/7%
0.85	13.73	3/87	0/10	2/42	17	0/50	1/50	616/14	3/8%
0.76	13.79	3/74	0/10	2/37	21	0/50	1/50	626/23	4/5%
0.78	13.78	3/76	0/10	2/39	20	0/50	1/50	623/63	4/4%
0.81	13.73	3/87	0/10	2/42	19	0/50	1/50	620/37	4/1%
0.84	13.73	3/87	0/10	2/42	18	0/50	1/50	616/66	3/8%

جدول ۳- ادامه.

Table 3- Continued.

d	k	w	h_1	h_2	n	ANF	AATS	E(A)	PS
0.93	13/72	3/89	0/10	2/43	14	0/50	1/50	609/01	3/2%
1.0	13/71	3/91	0/10	2/43	12	0/50	1/50	604/12	2/8%
1.01	13/71	3/91	0/10	2/43	12	0/50	1/50	603/50	2/7%
1.03	13/71	3/91	0/10	2/43	12	0/50	1/50	602/53	2/6%
1.06	13/71	3/92	0/10	2/44	11	0/50	1/50	601/28	2/5%
1.12	13/70	3/94	0/10	2/44	10	0/50	1/50	598/24	2/2%

جدول ۴- تاثیر پارامترهای ورودی مدل بر نمودار کنترل $RNLMVSIT^2$.

Table 4- The effect of model input parameters on the control chart $RNLMVSIT^2$.

Run	T_0	T_1	a_1	a_2	a_3	a_3'	λ	δ_1	δ_2	A	$\triangle_1$	$\triangle_2$	γ_1	γ_2	γ_{12}	k	w	h_1	h_2	n	ANF	AATS	E(A)
1	0/16	0/75	2	3	500	800	0.001	0.75	1	3	1	0/8	1.2	1	0.3	13.75	4.24	0.32	2.30	64	0.50	1.50	89/897
2	0/16	0/75	2	5	1000	1000	0.01	1.5	3	10	3	2/5	1.9	1.6	0.8	10.62	3.53	0.10	2.35	8	0.25	1.50	37/1799
3	0/16	0/75	2	12	1500	1200	0.1	25.2	4/5	15	5	4	2.7	2.5	1	9.76	3.84	0.10	1.70	4	0.05	1.10	77/2558
4	0/16	0/75	2	3	500	800	0.001	1.5	3	10	3	4	2.7	2.5	1	13.71	3.92	0.10	2.44	9	0.50	1.50	92/1699
5	0/16	0/75	2	5	1000	1000	0.01	25.2	4/5	15	5	0/8	1.2	1	0.3	11.74	3.80	0.10	2.42	4	0.13	1.50	73/2761
6	0/16	0/75	2	12	1500	1200	0.1	0.75	1	3	1	2/5	1.9	1.6	0.8	4.69	2.85	0.52	2.00	29	0.50	1.50	56/866
7	0/16	0/75	8	3	500	1000	0.1	0.75	3	15	5	0/8	1.9	1.6	1	9.68	4.26	0.10	2.02	11	0.04	1.25	22/2597
8	0/16	0/75	8	5	1000	1200	0.001	1.5	4/5	3	1	2/5	2.7	2.5	0.3	13.57	4.30	0.10	2.54	5	0.50	1.50	78/544
9	0/16	0/75	8	12	1500	800	0.01	25.2	1	10	3	4	1.2	1	0.8	9.26	3.42	0.10	2.32	7	0.50	1.50	20/1939
10	0/16	2	2	3	500	1200	0.01	0.75	4/5	10	5	2/5	1.2	2.5	0.8	13.12	4.03	0.10	2.46	6	0.07	1.50	10/1765
11	0/16	2	2	5	1000	800	0.1	1.5	1	15	1	4	1.9	1	1	6.74	3.32	0.10	1.93	13	0.20	1.37	40/2493
12	0/16	2	2	12	1500	1000	0.001	25.2	3	3	3	0/8	2.7	2.5	0.3	13.74	3.84	0.10	2.41	6	0.50	1.50	27/569
13	0/16	2	8	3	1000	1200	0.001	25.2	3	3	5	4	1.9	1	0.8	13.54	4.42	0.10	2.56	7	0.50	1.50	38/499
14	0/16	2	8	5	1500	800	0.01	0.75	4/5	10	1	0/8	2.7	2.5	1	9.06	3.84	0.10	2.46	5	0.50	1.50	71/4250
15	0/16	2	8	12	500	1000	0.1	1.5	1	15	3	2/5	1.2	2.5	0.3	5.54	3.24	0.10	2.05	11	0.33	1.50	78/2382
16	0/16	2	8	3	1000	1200	0.01	0.75	1	15	3	4	2.7	2.5	0.3	9.28	3.42	0.23	2.27	45	0.50	1.50	39/2609
17	0/16	2	8	5	1500	800	0.1	1.5	3	3	5	0/8	1.2	2.5	0.8	9.43	4.20	0.10	2.38	8	0.04	1.50	57/593
18	0/16	2	8	12	500	1000	0.001	25.2	4/5	10	1	2/5	1.9	1	1	13.65	4.07	0.10	2.48	4	0.50	1.50	90/1883
19	0/7	0/75	8	3	1000	800	0.1	25.2	4/5	3	3	2/5	1.2	1.6	1	10.66	5.12	0.10	2.56	5	0.02	1.50	94/617
20	0/7	0/75	8	5	1500	1000	0.001	0.75	1	10	5	4	1.9	2.5	0.3	13.74	4.27	0.32	2.31	64	0.50	1.50	99/1864
21	0/7	0/75	8	12	500	1200	0.01	1.5	3	15	1	0/8	2.7	1	0.8	9.25	3.43	0.10	2.32	7	0.50	1.50	78/5340
22	0/7	0/75	8	3	1000	1000	0.1	25.2	1	10	1	0/8	2.7	2.5	0.8	6.12	3.67	0.10	1.01	7	0.50	0.64	51/4076
23	0/7	0/75	8	5	1500	1200	0.001	0.75	3	15	3	2/5	1.2	1	1	13.67	4.03	0.10	2.47	12	0.50	1.50	33/2929
24	0/7	0/75	8	12	500	800	0.01	1.5	4/5	3	5	4	1.9	1.6	0.3	9.19	3.56	0.10	2.37	4	0.50	1.50	98/556
25	0/7	0/75	2	3	1500	1000	0.001	1.5	4/5	15	1	4	1.2	1.6	0.8	13.67	4.03	0.10	2.47	5	0.50	1.50	40/2750
26	0/7	0/75	2	5	500	1200	0.01	25.2	1	3	3	0/8	1.9	2.5	1	10.79	3.55	0.10	2.35	8	0.23	1.50	31/549
27	0/7	0/75	2	12	1000	800	0.1	0.75	3	10	5	2/5	2.7	1	0.3	4.63	2.83	0.63	2.04	6	0.50	1.50	31/1777
28	0/7	2	8	3	1500	1000	0.01	1.5	1	3	5	2/5	2.7	1	1	9.67	3.61	0.10	2.38	17	0.39	1.50	40/579
29	0/7	2	8	5	500	1200	0.1	25.2	3	10	1	4	1.2	1.6	0.3	5.75	3.66	0.10	1.35	5	0.44	0.88	47/1589
30	0/7	2	8	12	1000	800	0.001	0.75	4/5	15	3	0/8	1.9	2.5	0.8	13.68	4.01	0.10	2.46	6	0.50	1.50	78/2636
31	0/7	2	2	3	1500	1200	0.1	1.5	4/5	10	3	0/8	1.9	1	0.3	6.35	3.41	0.10	0.93	3	0.50	0.61	06/1668
32	0/7	2	2	5	500	800	0.001	25.2	1	15	5	2/5	2.7	1.6	0.8	13.73	3.87	0.10	2.42	10	0.50	1.50	25/2616
33	0/7	2	2	12	1000	1000	0.01	0.75	3	3	1	4	1.2	2.5	1	9.33	3.29	0.10	2.27	9	0.50	1.50	38/600
34	0/7	2	2	3	1500	800	0.01	25.2	3	15	1	2/5	1.9	2.5	0.3	9.22	3.50	0.10	2.35	5	0.50	1.50	91/2667
35	0/7	2	2	5	500	1000	0.1	0.75	4/5	3	3	4	2.7	1	0.8	10.28	4.12	0.10	2.36	5	0.03	1.50	55/513
36	0/7	2	2	12	1000	1200	0.001	1.5	1	10	5	0/8	1.2	1.6	1	13.78	3.76	0.10	2.39	20	0.50	1.50	26/1970

منابع

[1] Montgomery, D. C. (1980). The economic design of control charts: A review and literature survey. *Journal of quality technology*, *12*(2), 75–87. https://doi.org/10.1080/00224065.1980.11980940

[2] Saniga, E. M. (1989). Economic statistical control-chart designs with an application to and r charts. *Technometrics*, *31*(3), 313–320. https://doi.org/10.1080/00401706.1989.10488554

[3] Woodall, W. H. (1986). Weaknesses of the economic design of control charts. *Technometrics*, *28*(4), 408–409. https://doi.org/10.1080/00401706.1986.10488171

[4] Aparisi, F., & and Haro, C. L. (2003). A comparison of T 2 control charts with variable sampling schemes as opposed to MEWMA chart. *International journal of production research*, *41*(10), 2169–2182. https://doi.org/10.1080/0020754031000138655

[5] Faraz, A., R. B., K., & and Saniga, E. (2010). Economic and economic statistical design of T 2 control chart with two adaptive sample sizes. *Journal of statistical computation and simulation*, *80*(12), 1299–1316. https://doi.org/10.1080/00949650903062574

[6] Seif, A., Alireza, F., & and Saniga, E. (2015). Economic statistical design of the VP control charts for monitoring a process under non-normality. *International journal of production research*, *53*(14), 4218–4230. https://doi.org/10.1080/00207543.2014.986298

[7] Seif, A., Alireza, F., Erwin, S., & and Heuchenne, C. (2016). A statistically adaptive sampling policy to the Hotelling's T2 control chart: Markov chain approach. *Communications in statistics-theory and methods*, *45*(13), 3919–3929. https://doi.org/10.1080/03610926.2014.911910

[8] Seif, A. (2018). Multi-objective genetic algorithm for economic statistical design of the T2 control chart with variable sample size: The updated markov chain approach. *Journal of testing and evaluation*, *46*(3), 1209–1219. https://doi.org/10.1520/JTE20160647

[9] Bai, D. S., & Lee, K. T. (1998). An economic design of variable sampling interval $\bar{X}$ control charts. *International journal of production economics*, *54*(1), 57–64. https://doi.org/10.1016/S0925-5273(97)00125-4

[10] Saadatmelli, A., M. Bameni, M., Asghar, S., & and Faraz, A. (2019). Economic design of $\bar{X}$ control charts with multiple assignable causes under Burr XII shock model. *Communications in statistics-theory and methods*, *48*(3), 500–522. https://doi.org/10.1080/03610926.2017.1414262

[11] Naderi, M. H., Seif, A., & Bameni Moghadam, M. (2018). Constrained optimal design of $bar{X}$ control chart for correlated data under weibull shock model with multiple assignable causes and taguchi loss function. *Srtc-jsri*, *15*(1), 1–44. http://dx.doi.org/10.29252/jsri.15.1.1

[12] Abolmohammadi, M., Seif, A., Behzadi, M. H., & B. Moghadam, M. (2021). Economic statistical design of adaptive $\bar{X}$ $\bar{X}$ control charts based on quality loss functions. *Operational research*, *21*(2), 1041-1080.. https://doi.org/10.1007/s12351-019-00467-3

[13] Taguchi, G., Taguchi, G., Elsayed, E. A., & Hsiang, T. C. (1989). *Quality engineering in production systems*. McGraw-Hill companies. https://b2n.ir/tp9621

[14] Chou, C. Y., Liu, H. R., Huang, X. R., & Chen, C. H. (2002). Economic-statistical design of multivariate control charts using quality loss function. *The international journal of advanced manufacturing technology*, *20*(12), 916–924. https://doi.org/10.1007/s001700200215

[15] Serel, D. A. (2009). Economic design of EWMA control charts based on loss function. *Mathematical and computer modelling*, *49*(3), 745–759. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.06.012

[16] Chiu, W. K. (1975). Economic design of attribute control charts. *Technometrics*, *17*(1), 81–87. https://doi.org/10.1080/00401706.1975.10489275

[17] Spiring, F. A. (1993). The reflected normal loss function. *Canadian journal of statistics*, *21*(3), 321–330. https://doi.org/10.2307/3315758